



JP17K19960

# 周期スケジューリングと 密度限界

河村彰星 (京大)





大阪組合せ論セミナー

令和2年10月3日

## 輪番詰込問題 (Pinwheel Scheduling) [HMRTV89]

正整数の組  $a = (a_1, a_2, \dots, a_k)$  が与えられる  
各仕事  $i$  は  $a_i$  日に一度以上やる必要がある  
これを満しながら一日ひとつ仕事をやり続けられるか？

以下では  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k$  とする

例	(3, 3, 3)	詰込可能	
	(2, 4, 4)	詰込可能	
	(2, 4, 5)	詰込可能	
	(2, 3, 4)	詰込不可能	
	(2, 3, 7)	詰込不可能	
	(3, 4, 5, 8)	詰込可能	

## 定理 [HMRTV89]

$a = (a_1, a_2, \dots, a_k)$  が詰込可能ならば  $a$  は周期  $a_1 a_2 \dots a_k$  以内で詰込可能

**証明**  $a$  の詰込スケジュールは次の有向グラフにおける無限の歩に対応する

■ 頂点集合  $\{1, \dots, a_1\} \times \{1, \dots, a_2\} \times \dots \times \{1, \dots, a_k\}$

頂点  $r = (r_1, \dots, r_k)$  は「各仕事  $i$  を最近  $r_i$  日やってない」を表す

■ 辺  $r \rightarrow s$  は「 $r$  な日に或る仕事を行うと翌日  $s$  になる」とき設ける 即ち

$$\text{辺 } r \rightarrow s \text{ あり} \iff \text{或る } j \text{ が存在して各 } i \text{ について } s_i = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ r_i + 1 & (i \neq j) \end{cases}$$

有限グラフ上の無限の歩なので閉路をもつ

これにより詰込可能性は 有限時間で判定可能

多項式時間で判定可能かは判っていない (NP困難性なども知られていない)

## 定義 [HMRTV89]

$a = (a_1, a_2, \dots, a_k)$  の**密度** (density) とは  $D(a) = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$

もし  $D(a) > 1$  ならば明らかに  $a$  は詰込不能

逆は一般には成立たないが……

## 定理 [HMRTV89]

$a$  の各項が以降の項を割切り かつ  $D(a) \leq 1$  ならば  $a$  は詰込可能

例 (3, 6, 6, 6, 12, 36, 36) は詰込可能

∵ 貪慾に割当てていけばできる

## 系

$D(a) \leq \frac{1}{2}$  ならば  $a$  は詰込可能

∵ 各項を 2 冪に切捨てても密度  $\leq 1$  なので

例 (5, 7, 8, 30, 100)  $\geq$  (4, 4, 8, 16, 64) は詰込可能

## 定理 [HRTV92]

$a = (\underbrace{e_1, \dots, e_1}_{k_1}, \underbrace{e_2, \dots, e_2}_{k_2})$  (二種類の値からなる) で  $D(a) \leq 1$  ならば  $a$  は詰込可能

$$\frac{k_1}{e_1} + \frac{k_2}{e_2} \leq 1$$

例えば  $(5, 5, 5, 18, 18, 18, 18, 18, 18, 18)$  は詰込可能

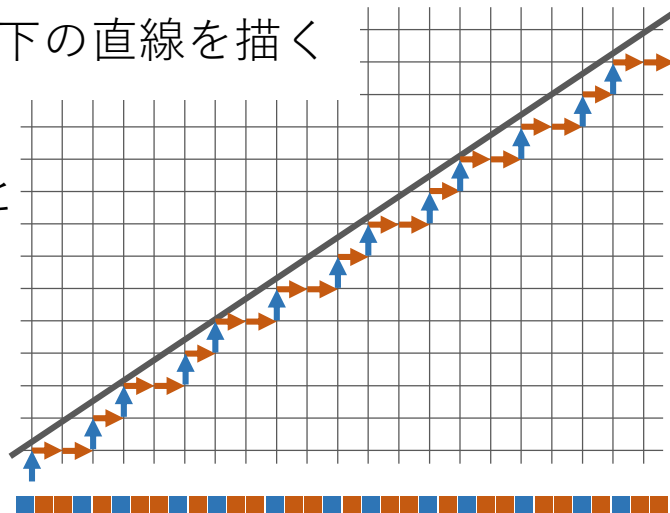
### 証明概略

方眼紙に傾き  $\frac{k_2}{e_2 - k_2}$  以上  $\frac{e_1 - k_1}{k_1}$  以下の直線を描く

この直線をぎりぎり超えずに格子点を歩くときの  $\rightarrow$  と  $\uparrow$  の並びを  $e_1$  と  $e_2$  に割り当てると

- どの  $e_1$  日間にも  $k_1$  個以上の  $\blacksquare$  がある
- どの  $e_2$  日間にも  $k_2$  個以上の  $\blacksquare$  がある

となる



三種類だと不成立 例えば  $(2, 3, a_3)$  は  $a_3$  が幾ら大きくても詰込不可能

$D(a) < B$  ならば  $a$  は詰込可能

と言える最大の  $B$  は？

ここまでの議論より  
 $\frac{1}{2}$  以上  $\frac{5}{6}$  以下

**定理 (再)** [HMRTV89]

$D(a) \leq \frac{1}{2} = 0.5$  ならば  $a$  は詰込可能

← 各項を 2 冪へ切捨て

例  $(7, 7, 13, 30, 100) \rightarrow (4, 4, 8, 16, 64)$  は詰込可能

**定理** [CC93]

$D(a) < \frac{13}{20} = 0.65$  ならば  $a$  は詰込可能

← 「各項を  $2^i$  に切捨て」を最良の  $i$  で行う

例  $(7, 7, 13, 30, 100) \rightarrow (6, 6, 12, 24, 96)$  なども考慮

⋮

**定理** [FL02]

$D(a) < \frac{3}{4} = 0.75$  ならば  $a$  は詰込可能

← 更に色々頑張る

**予想** [CC93]

$D(a) < \frac{5}{6} = 0.833 \dots$  ならば  $a$  は詰込可能

[HMRTV89] R. Holte, A. Mok, L. Rosier, I. Tulchinsky, D. Varvel. The pinwheel: a real-time scheduling problem. In Proc. 22nd Hawaii International Conference on System Science, pp. 693–702, 1989.

[CC93] M.Y. Chan, F. Chin. Schedulers for larger classes of pinwheel instances. Algorithmica 9, pp. 425–462, 1993.

[FL02] P.C. Fishburn, J.C. Lagarias. Pinwheel scheduling: achievable densities. Algorithmica 34, pp. 14–38, 2002.

「各仕事  $i$  を  $a_i$  日に一度以上」ではなく「 $a_i$  日ちょうど」を要求すると……

## 剰余類詰込問題 [WL83・Sun92]

正整数の組  $a = (a_1, \dots, a_k)$  が与えられる

剰余の組  $r = (r_1, \dots, r_k)$  をうまく選んで

集合  $r_i \bmod a_i = \{a_i n + r_i \mid n \in \mathbf{Z}\}$  ( $i = 1, \dots, k$ ) を重なりなくできるか

例 (2, 2) 詰込可能 

(2, 3) 詰込不可能

(2, 4) 詰込可能 

(4, 6, 10) 詰込不可能

この問題は **NP** に属する 何故なら  $r$  が与えられたら  
条件を満すか否かを次により判定できる (中華剰余定理)

$r_i \bmod a_i$  と  $r_j \bmod a_j$  が重なる  $\Leftrightarrow r_i \equiv r_j \pmod{\gcd(a_i, a_j)}$

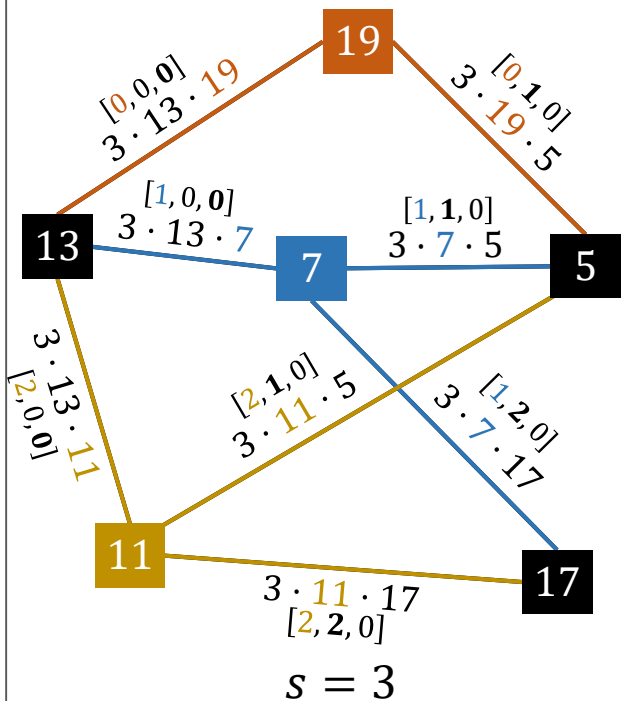
[WL83] W.D. Wei, C.L. Liu,. On a periodic maintenance problem. Operations Research Letters 2, pp. 90–93, 1983.

[Sun92] Z. Sun. On disjoint residue classes. Discrete Mathematics 104, pp. 321–326, 1992.

# 定理 [KS20]

剰余類詰込問題は **NP 完全** (入力中の各整数  $a_i$  が文字列  $0^{a_i}$  で与えられたとしても)

**証明概略** 三角形のないグラフの点被覆 (vertex cover) からの帰着



グラフ  $(V, \{1, \dots, k\})$  と数  $s \in \mathbb{N}$   
 このグラフに大きさ  $\leq s$  の点被覆あり  
 ↓  
 次のように作る  $(a_1, \dots, a_k)$   
 ↑  
 詰込可能

各  $u \in V$  に相異なる大きな素数  $p_u$  を割当て  
 各辺  $i = uv$  に対し  $a_i = s \cdot p_u \cdot p_v$  とする

中華剰余定理により  $a_i$  による剰余  $r_i$  は  
 $s, p_u, p_v$  それぞれによる剰余  $r_{i1}, r_{i2}, r_{i3}$  で指定される  
 そこで  $r_i = [r_{i1}, r_{i2}, r_{i3}]_{s, p_u, p_v}$  と書く (図では添字を省略)



「逆」の問題（詰込を被覆に）

前頁までの話を知らず  
独立に考えてしまいました

## 輪番被覆問題（Point Patrolling） [KS20]

正整数の組  $a = (a_1, a_2, \dots, a_k)$  が与えられる  
各人  $i$  は  $a_i$  日に一度以下しか仕事を担当できない  
これを満しながら毎日だれかが仕事をやり続けられるか？

$(4, 4, 6, 6, 6)$  ➡ 被覆可能       $(2, 3, 4)$  ➡ 被覆可能  
 $(3, 4, 5, 6, 6)$  ➡ 被覆可能       $(2, 3, 5, 9, \dots, 2^k + 1)$       被覆不可能

$D(a) < 1$  ➡ 被覆不可能

$D(a) \geq 2$  ➡ 被覆可能 ∵ 先程と同様（各要素を2冪に切り上げ）

予想  
1.263 ...  
まで下げられる

各要素  $\leq 16$  で被覆不可能なものの密度の最大値が  
 $D(2, 3, 5, 9) = \frac{103}{90}$  であることまでは計算機で確認できた

[KS20] A. Kawamura, M. Soejima. Simple strategies versus optimal schedules in multi-agent patrolling. Theoretical Computer Science 839, pp. 195–206, 2020.

**定理** [K未発表] ( [KS20] の考え方に基づく )

$D(a) > \frac{113}{80} = 1.4125$  ならば  $a$  は被覆可能

**証明概略** 次の「二人を纏めて一人にする操作 (端数は切上げ)」を考える

例  $(3, 3, 7, 11, 18, 18, 23, 23, 23, 27) \rightarrow (3, 3, 7, 9, 11, 12, 14)$

この操作は 被覆**不可能**性を保つが 密度は**少し減る** (ことがある)

密度  $D$  の任意の列は 有限回この操作を施して  
各要素  $\leq 2M$  かつ密度  $\geq \frac{MD-1}{M+1}$  にできる

これを  $(D, M) = \left(\frac{113}{80}, 8\right)$  で用いると 前頁の計算機実験とから定理を得る

**予想** [KS20]

$D(a) > D(2, 3, 5, 9, 17, \dots) = 1.263 \dots$  ならば  $a$  は被覆可能

先程と同じく「 $a_i$  日ちょうど」では？

各要素が異なる被覆は  
エルデシュの興味の対象の一つだったらしい

定理 [Hou15] ( [Erd50] の問を解決)

$10^{16} < a_1 < a_2 < \dots < a_k$  ならば  $a$  は被覆不能

## 剰余類被覆問題

正整数の組  $a = (a_1, \dots, a_k)$  が与えられる  
剰余の組  $r = (r_1, \dots, r_k)$  をうまく選んで  
集合  $r_i \bmod a_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) で整数全体を覆えるか

例	(2, 2)	被覆可能	
	(2, 3, 3)	被覆不可能	
	(2, 4, 4)	被覆可能	
	(2, 3, 4, 6, 12)	被覆可能	

この問題は **NP** に属するか不明 ( $r$  が与えられても判定は容易でない)  
実は  $r$  が与えられて被覆性を判定する問題が既に **coNP** 完全 (次頁)

[Hou15] B. Hough. Solution of the minimum modulus problem for covering systems. *Annals of Mathematics* 181, pp. 361–382, 2015.

[Erd50] P. Erdős. On integers of the form  $2^k + p$  and some related problems. *Summa Brasiliensis Mathematicae* 2, pp. 113–123, 1950.

## まとめ

正整数の組  $(a_1, \dots, a_k)$  が与えられたとき  
① 集合  $A_1, \dots, A_k \subseteq \mathbf{Z}$  であって  
各  $i = 1, \dots, k$  と長さ  $a_i$  の任意の区間  $I$  について  
 $|A_i \cap I|$  ② を満すものはあるか判定せよ

### 輪番詰込問題

- ① 互に交らない
- ②  $\geq 1$

### 剰余類詰込問題

- ① 互に交らない
- ②  $= 1$

NP 完全

$D(a) \leq 1$  が必要

### 輪番被覆問題

- ①  $\mathbf{Z}$  全体を覆う
- ②  $\leq 1$

### 剰余類被覆問題

- ①  $\mathbf{Z}$  全体を覆う
- ②  $= 1$

NP 困難

$D(a) \geq 1$  が必要

密度  $D(a) = 1$  に制限すると これら四問題は一致  
(整数全体を重なりなく分割する問題 [Zná69])

予想 [KS20]

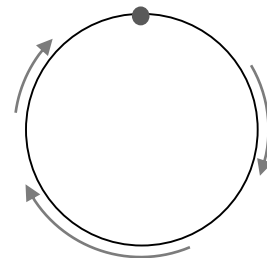
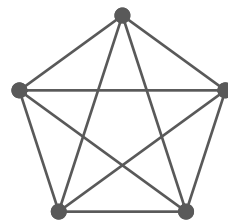
この問題すら **NP 完全**

[Zná69] Š. Zná. On exactly covering systems of arithmetic sequences. *Mathematische Annalen* 180, pp. 227–232, 1969.

[KS20] A. Kawamura, M. Soejima. Simple strategies versus optimal schedules in multi-agent patrolling. *Theoretical Computer Science* 839, pp. 195–206, 2020.

変種・拡張

# 一日一仕事 → 移動時間



仕事がある場所の間の移動時間（距離）が設定されている

詰込問題 → **竹切り問題**（Bamboo Garden Trimming [GKLLMR17]）

被覆問題 → **警邏問題**（Periodic Latency / Patrolling [CSW11・CGKK11]）

先程までの問題は「どの二点間も距離 1」という特別な場合

距離が入って複雑になる代りに

間隔  $a_i$  が一定の場合や 近似アルゴリズムなど

様々な切り口から研究がなされている

→ 別スライド

[GKLLMR17] L. Gąsieniec, R. Klasing, C. Levcopoulos, A. Lingas, J. Min, T. Radzik. Bamboo garden trimming problem (perpetual maintenance of machines with different attendance urgency factors). In Proc. 43rd International Conference on Current Trends in Theory and Practice of Computer Science (SOFSEM), LNCS 10139, pp. 229–240, 2017.

[CSW11] S. Coene, F.C.R. Spieksma, G.J. Woeginger. Charlemagne’s challenge: the periodic latency problem. Operations Research 59, pp. 674–683, 2011.

[CGKK11] J. Czyzowicz, L. Gąsieniec, A. Kosowski, E. Kranakis. Boundary patrolling by mobile agents with distinct maximal speeds. In Proc. 19th Annual European Symposium on Algorithms (ESA), LNCS 6942, pp. 701–712, 2011.